

Capitolo 1

I sistemi di riferimento.

1.1 - La sfera delle direzioni.

La determinazione vettoriale della posizione di un astro sulla volta celeste, rispetto ad un punto prefissato di riferimento, nel quale l'osservatore si trova o si immagina di trovarsi, è dato dal *vettore* $(V-O)$; questa semplicissima forma richiede però la conoscenza di due quantità: il *modulo* del vettore e il verso del segmento che congiunge O con V .

Osservando l'astro V con un solo strumento astronomico, in generale, non è possibile determinare tutti gli elementi che definiscono il vettore; per questi motivi è molto utile e spesso usata la rappresentazione del vettore $(V-O)$ mediante il prodotto del modulo per il versore: mostrando così la parte che dipende dalla sola direzione orientata nella quale V è visto da O e che può essere determinata per mezzo di strumenti indipendentemente dalla distanza OV ; in moltissimi casi la distanza di V da O può essere non indispensabile quando si introduce la *sfera delle direzioni*.

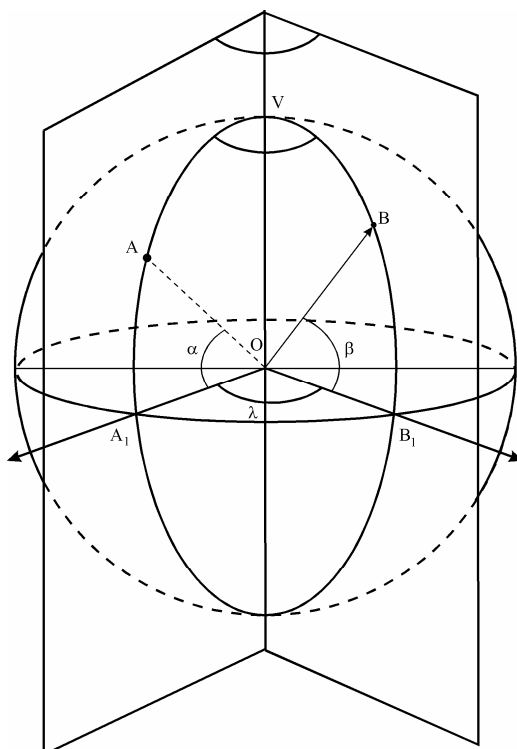


Figura 1.1 – Sfera delle direzioni

Consideriamo, allora, gli infiniti versori uscenti dal punto O : essi individuano una superficie appartenente ad una sfera di raggio unitario, avente il centro nel punto O ; questa superficie è detta *sfera delle direzioni*; infatti, ogni direzione orientata uscente da O corrisponderà univocamente ad un astro della sfera celeste proiettato su di essa.

Con l'uso della sfera delle direzioni tutti i problemi goniometrici dello spazio presentano una rapida ed agevole soluzione; infatti, qualunque piano diametrale taglia la superficie sferica lungo un cerchio massimo ed è da questo univocamente determinato. L'angolo fra due direzioni orientate è misurato dall'arco di cerchio massimo compreso fra i due punti che determinano sulla sfera le due direzioni suddette; l'angolo diedro formato da due piani diametrali è uguale all'angolo fra i due corrispondenti archi di cerchio massimo (v. figura 1.1):

$$\alpha = AA_1 \quad , \quad \beta = BB_1 \quad , \quad \lambda = A_1B_1$$

Le relazioni fra rette e piani che passano per uno stesso punto vengono così tradotte in relazioni fra punti e cerchi massimi sulla superficie sferica. Le trasformazioni di coordinate, fra un riferimento ed un altro, trovano una via più comoda applicando la proprietà delle matrici di rotazione.

1.2 La matrice di rotazione.

Sia $(V-O)$ un versore appartenente al piano con Oxy il sistema di riferimento levogiro e con Ox l'asse polare. Le coordinate di V rispetto al sistema sono:

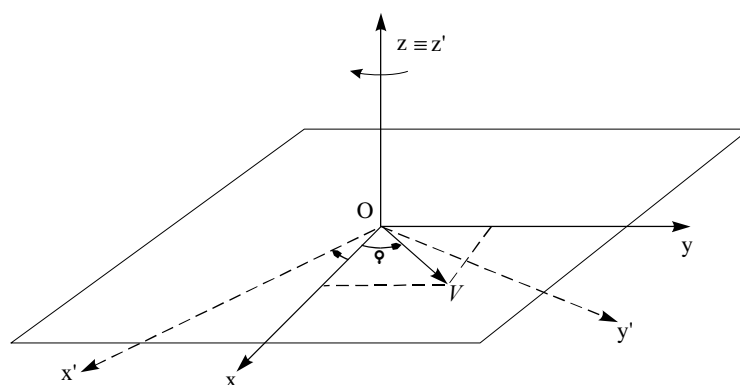


Figura 1.2 – Rotazione del sistema di riferimento nel piano

$$(V - O) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Ruotando il sistema di riferimento attorno all'asse z nel senso orario dell'angolo θ si ottiene:

$$\begin{aligned} x' &= \cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta \\ y' &= \sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

che possono essere scritte in forma matriciale:

$$V - O = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta & -y \sin \theta \\ x \sin \theta & y \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

Considerando il versore $(V-O)$ riferito al sistema tridimensionale, l'espressione precedente assume la forma più generale:

$$V - O = \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = M V \quad (1.4)$$

con M matrice di rotazione e V versore $(V-O)$.

Inoltre si fa osservare che una rotazione di segno contrario $(-\theta)$ permette di ritrovare il versore di partenza:

$$V - O = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = B V$$

con $B=M^T$ matrice trasposta di M . Si ricava facilmente che il prodotto $MM^T=I$ con I matrice unitaria.

Passiamo, ora alla generalizzazione e definizione della matrice di rotazione rispetto ad un asse generico di rotazione, dato che il caso considerato può essere visto come caso particolare dell'asse di rotazione coincidente con uno degli assi di riferimento. Sia U , il versore dell'asse di rotazione di componenti $(u_1, u_2, u_3)^T$ rispetto ad un generico sistema di riferimento. Per una rotazione dell'angolo θ , dalla figura 1.3 si ricava la seguente espressione vettoriale:

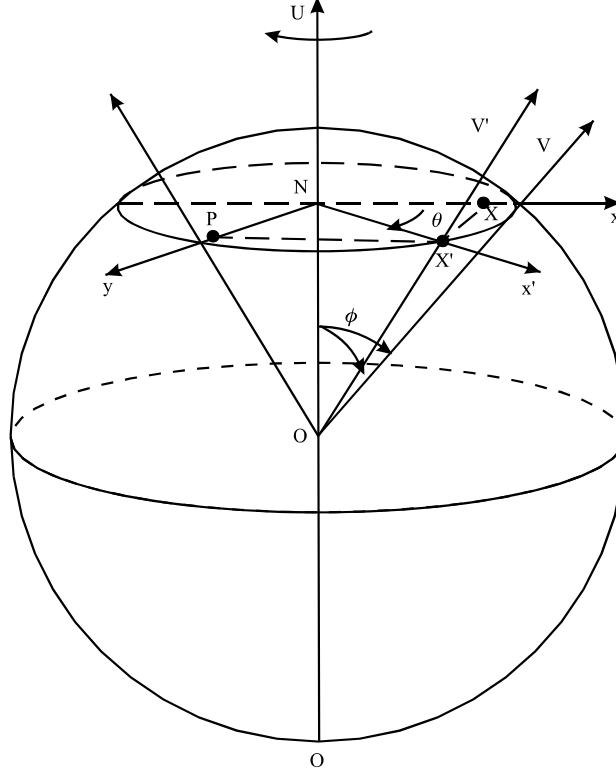


Figura1.3 – Rotazione del sistema di riferimento nello spazio

$$V' = ON + NX'$$

con ON invariante, dato che qualunque sia la rotazione attorno ad U , rappresenta la proiezione di V e di V' lungo l'asse di versore U . Operando per mezzo di operazioni vettoriali si ha:

$$\begin{aligned} ON &= (U \bullet V)U \\ NX &= V - (U \bullet V)U \\ |NX| &= |V - (U \bullet V)U| = |NX'| = |V'| \sin \phi = |U \times V| \end{aligned} \quad (1.5)$$

essendo $|NX| = |NX'| = |NV|$ e $NX \perp NV$. Calcolando NX come somma di vettori lungo le direzioni NX e NP si ha:

$$NX' = (V - (U \bullet V)U) \cos \theta + (U \times V) \sin \theta \quad (1.6)$$

con θ angolo di rotazione. La sostituzione di ON e NX permette di esprimere la relazione precedente nel seguente modo:

$$V' = (U \bullet V)U + (V - (U \bullet V)U) \cos \theta + (U \times V) \sin \theta$$

e tenendo presente le seguenti notazioni matriciali:

$$(U \bullet V)U = (UU^T)V = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_1 u_2 & u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & u_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = PV$$

$$U \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 z - u_3 y \\ u_3 x - u_1 z \\ u_1 y - u_2 x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = QV$$

con P e Q matrice simmetrica ed asimmetrica; dopo queste proprietà l'espressione di V' diventa:

$$V' = [P + (I - P) \cos \theta + Q \sin \theta]V = MV \quad (1.7)$$

con M matrice di rotazione, i cui elementi sono dati dalla seguente espressione:

$$M = \begin{vmatrix} u_1^2 + (1 - u_1^2) \cos \theta & u_1 u_2 (1 - \cos \theta) - u_3 \sin \theta & u_1 u_3 (1 - \cos \theta) + u_2 \sin \theta \\ u_1 u_2 (1 - \cos \theta) + u_3 \sin \theta & u_2^2 + (1 - u_2^2) \cos \theta & u_2 u_3 (1 - \cos \theta) - u_1 \sin \theta \\ u_1 u_3 (1 - \cos \theta) - u_2 \sin \theta & u_2 u_3 (1 - \cos \theta) + u_1 \sin \theta & u_3^2 + (1 - u_3^2) \cos \theta \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

Un'importante proprietà della matrice M si ottiene associando a V e V' alternativamente i versori degli assi di riferimento:

$$i' = Mi \quad , \quad j' = Mj \quad , \quad k' = Mk$$

inoltre, per la proprietà precedentemente trovata, il versore V sarà dato dal prodotto matriciale $M^T V'$ con M^T matrice trasposta di M :

$$V = M^T V' \quad \text{e} \quad MM^T = I$$

In molte applicazioni occorre, per passare da un sistema di riferimento ad un altro, effettuare delle rotazioni; fra i tanti metodi geometrici e trigonometrici l'uso delle matrici di rotazione, in molti casi, si fa preferire per la sua semplicità di applicazione.

Una generica rotazione rispetto ad un asse di rotazione comunque orientato può sempre essere il risultato di due o più rotazioni rispetto agli assi di riferimento. Si ricava facilmente che la matrice di rotazione M assume una forma molto semplice quando la rotazione avviene attorno un asse del sistema di riferimento; così se la rotazione avviene intorno all'asse Ox il versore U ha le seguenti componenti:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e la matrice } M \text{ per una rotazione oraria di } \alpha=\theta \text{ assume la}$$

forma:

$$M_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

In seguito il pedice della matrice rappresenta l'asse di rotazione.

Con lo stesso metodo, essendo i versori $U_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $U_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e per rotazio-

ni β e γ , si ottengono le matrici di rotazione per gli assi Oy ed Oz :

$$M_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Da quanto trovato sulle matrici di rotazione può essere enunciata la seguente regola:

La trasformazione di coordinate, da un sistema di riferimento ad un altro, generata da una generica rotazione e con l'asse di rotazione non coincidente con uno degli assi del sistema di riferimento, potrà essere realizzata mediante la combinazione di due o più rotazioni rispetto agli assi, esistendo la proprietà:

$$M(\theta) = M_x(\alpha)M_y(\beta)M_z(\gamma).$$

Con l'angolo di rotazione θ positivo nel senso orario. E' importante ricordare che in molte applicazioni, dove è usata la terna levogira, il verso positivo dell'angolo di rotazione è quello antiorario; in queste applicazioni le matrici di rotazioni (1.9) e (1.10) assumono la seguente forma:

$$M_x(\alpha') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha' & \sin \alpha' \\ 0 & -\sin \alpha' & \cos \alpha' \end{vmatrix} \quad (1.9.1)$$

$$M_y(\beta') = \begin{vmatrix} \cos \beta' & 0 & -\sin \beta' \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta' & 0 & \cos \beta' \end{vmatrix}, M_z(\gamma') = \begin{vmatrix} \cos \gamma' & \sin \gamma' & 0 \\ -\sin \gamma' & \cos \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.10.1)$$

1.3 - Relazioni trigonometriche fondamentali

Sulla sfera di raggio unitario, come introdotto nel paragrafo 1.1, è possibile eseguire sia delle operazioni di rotazione di vettore espresso in termini di coordinate rettangolari che definire trasformazioni che operano su coordinate sferiche rispetto ad una circonferenza massima ed un polo di riferimento. In moltissimi casi, operando sulla superficie sferica, sono molto utili delle relazioni trigonometriche che utilizzano sia lati sia angoli di un generico triangolo sferico.

Sia ABC un triangolo sferico (v. figura 1.4) ed $OXYZ$ la terna cartesiana con l'asse OZ passante per il polo B e l'arco AB appartenente al piano OBX con il punto A di coordinata negativa ($-x$). La terna rettangolare così definita permette di determinare le coordinate rettangolari dei tre vertici:

$$A = \begin{vmatrix} -\sin c \\ 0 \\ \cos c \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{vmatrix} -\sin a \cos \hat{B} \\ \sin a \sin \hat{B} \\ \cos a \end{vmatrix} \quad (1.11)$$

Operando una rotazione intorno all'asse OY dell'angolo c in modo da portare l'asse OZ a passare per il punto A , si possono ricavare le coordinate del punto C :

$$C = \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin b \cos \hat{A} \\ \sin b \sin \hat{A} \\ \cos b \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

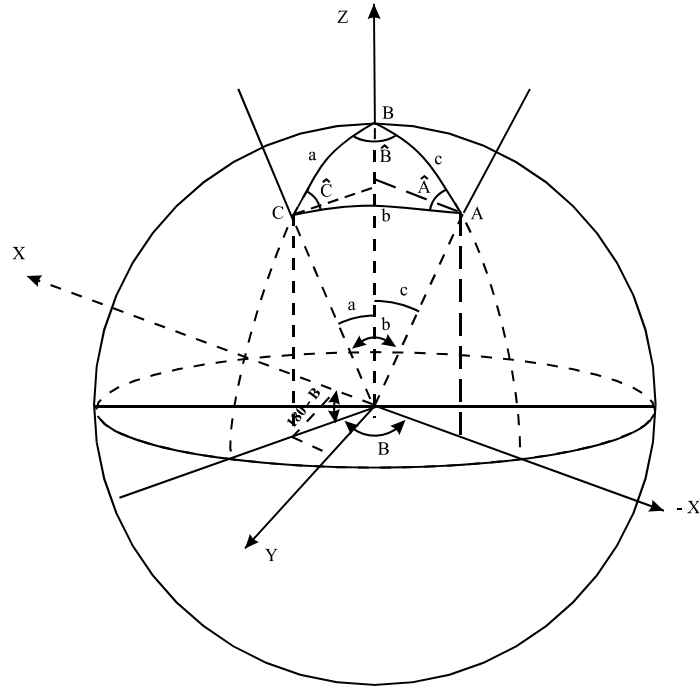


Figura 1.4 – Rotazione del sistema di riferimento sulla sfera delle direzioni

ed il seguente prodotto matriciale permette di esprimere le coordinate di C rispetto al secondo sistema di riferimento:

$$\begin{aligned}
C = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -\sin a \cos \hat{B} \\ \sin a \sin \hat{B} \\ \cos a \end{vmatrix} = A_y(c) \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos c & 0 & -\sin c \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin c & 0 & \cos c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin b \cos \hat{A} \\ \sin b \sin \hat{A} \\ \cos b \end{vmatrix} \\
C \begin{vmatrix} -\sin a \cos \hat{B} \\ \sin a \sin \hat{B} \\ \cos a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \sin b \cos c \cos \hat{A} - \sin c \cos b \\ \sin b \sin \hat{A} \\ \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A} \end{vmatrix} \quad (1.13)
\end{aligned}$$

Dall'uguaglianza degli elementi dei due vettori dati dalla (1.13) si ottengono le tre relazioni fondamentali della trigonometria sferica note come relazioni di Gauss:

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A} \quad , \quad \text{formula di Eulero} \\
\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} &= \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} \quad , \quad \text{teorema dei seni} \\
\sin a \cos \hat{B} &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \hat{A} \quad , \quad \text{teorema delle proiezioni}
\end{aligned}$$

Allo stesso risultato si arriva utilizzando alcune proprietà dell'analisi vettoriale. Siano l, m, n , i versori che definiscono i vertici A, B, C del triangolo sferico dal centro O (v. figura. 1.4); il prodotto vettoriale $l \times m$ è un vettore di modulo $\sin c$ e perpendicolare al piano AOB ; allo stesso modo, il prodotto vettoriale $l \times n$ è un vettore di modulo $\sin b$ e perpendicolare al piano AOC . L'angolo fra i due vettori è dato dall'intersezione dei citati piani (\hat{A}). Considerando il prodotto scalare dei due vettori calcolati si ha:

$$\begin{aligned}
(l \times m) \cdot (l \times n) &= \sin c \sin b \cos \hat{A} \\
&= l \cdot [m \times (l \times n)] = l \cdot [l(m \cdot n) - n(l \cdot m)] \\
&= (m \cdot n) - (l \cdot n)(l \cdot m) = \cos a - \cos b \cos c
\end{aligned}$$

da cui si ricava l'equazione fondamentale dell'Astronomia sferica (*formula di Eulero*):

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A} \quad (1.14)$$

Seguendo lo stesso procedimento si ottengono per rotazione le altre due relazioni:

$$\begin{aligned}\cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \hat{B} \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \hat{C}\end{aligned}\quad (1.15)$$

Le relazioni relative al teorema dei seni sono possibili ricavarle mediante il seguente prodotto vettoriale:

$$(l \times m) \times (l \times n) = (l \cdot m \times n)l$$

Per definizione di prodotto vettoriale a primo membro, si ha:

$$\begin{aligned}(\sin b \sin c \sin \hat{A})l &= (l \cdot m \times n)l \\ \sin b \sin c \sin \hat{A} &= l \cdot m \times n\end{aligned}$$

e per rotazione ciclica dei lati e degli angoli:

$$\begin{aligned}\sin c \sin a \sin \hat{B} &= m \cdot n \times l \\ \sin a \sin b \sin \hat{C} &= n \cdot l \times m\end{aligned}$$

Per la proprietà di prodotto vettoriale e scalare i secondi membri delle tre equazioni trovate sono uguali per cui è possibile scrivere la seguente uguaglianza:

$$\sin b \sin c \sin \hat{A} = \sin c \sin a \sin \hat{B} = \sin a \sin b \sin \hat{C} \quad (1.16)$$

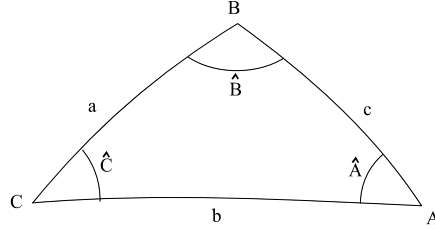
$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin b} \quad , \quad \frac{\sin \hat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin c} \quad , \quad \frac{\sin \hat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin c}$$

La dimostrazione della terza formula della terna di Eulero è dimostrata nel paragrafo relativo alle relazioni trigonometriche dei quattro elementi consecutivi.

1.3.1 - Relazioni di prima specie

Il confronto fra le componenti del vettore a primo membro e quelle del vettore dell'ultimo membro permette di ricavare tre relazioni che rappre-

sentano le equazioni fondamentali della trigonometria sferica per un generico triangolo sferico:



$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos a \quad (\text{Teorema delle proiezioni})$$

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A \quad (\text{Teorema dei seni}) \quad (1.17)$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (\text{Formula di Eulero})$$

Esse sono dette anche relazioni di prima specie; per rotazione dei lati e degli angoli è possibile trovare tutte le altre formule corrispondenti; seguendo la successione dei lati e degli angoli

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \\ \hat{C} \end{pmatrix}.$$

Dalla terza si ottengono:

Formule di Eulero:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A} \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \hat{B} \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \hat{C} \end{aligned} \quad (1.18)$$

per le quali vale seguente regola:

In un triangolo sferico, il coseno di un lato è dato dal prodotto dei coseni degli altri due lati più il prodotto dei seni degli stessi lati per il coseno dell'angolo compreso ed opposto al primo lato (v. Figura. 1.5 – il lettore potrà usare lo schema riportato in figura).

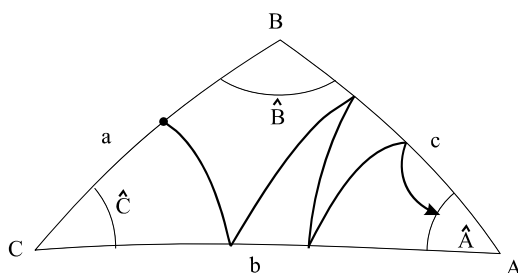


Figura 1.5 – Triangolo sferico: schema di calcolo

Si dimostra che esistono anche le seguenti relazioni applicate agli angoli, dette relazioni correlative:

$$\begin{aligned}\cos \hat{A} &= -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cos a \\ \cos \hat{B} &= -\cos \hat{C} \cos \hat{A} + \sin \hat{C} \sin \hat{A} \cos b \\ \cos \hat{C} &= -\cos \hat{A} \cos \hat{B} + \sin \hat{A} \sin \hat{B} \cos c\end{aligned}\tag{1.19}$$

Per le quali vale la seguente regola:

In un triangolo sferico, il coseno di un angolo è dato dal prodotto dei coseni degli altri due angoli cambiato di segno più il prodotto dei seni degli stessi angoli per il coseno del lato compreso ed opposto al primo angolo.

Dalla seconda si ottengono le formule riguardanti il teorema dei seni:

Teorema dei seni:

$$\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}}\tag{1.20}$$

Per le quali vale la seguente regola:

In un triangolo sferico, il seno di un elemento diviso per il seno dell'angolo opposto è uguale al seno di un secondo lato diviso il seno del corrispondente angolo opposto.

Infine, dalla prima si ottengono le formule concernenti il teorema delle proiezioni:

Teorema delle proiezioni:

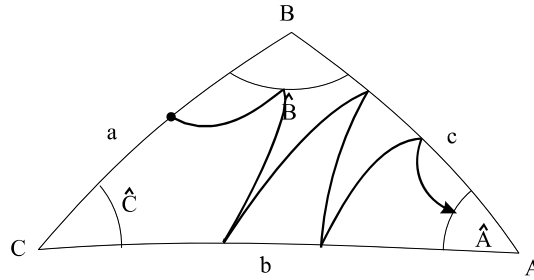


Figura 1.6 – Triangolo sferico: schema di calcolo

$$\begin{aligned}
 \sin a \cos \hat{B} &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \hat{A} \\
 \sin a \cos \hat{C} &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \hat{A} \\
 \sin b \cos \hat{C} &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos \hat{B} \\
 \sin b \cos \hat{A} &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \hat{B} \\
 \sin c \cos \hat{A} &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \hat{C} \\
 \sin c \cos \hat{B} &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos \hat{C}
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Riferendoci alla prima equazione si può enunciare la seguente regola:

In un triangolo sferico il seno di un lato(a) per il coseno dell'angolo adiacente(\hat{B}) è dato dal prodotto del coseno del secondo lato(b) ed opposto al primo angolo per il seno del terzo lato(c) diminuito del prodotto del seno del secondo lato(a) per il coseno del terzo lato(c) e per il coseno dell'angolo opposto al primo lato(\hat{A}). (v. figura 1.6; nelle formule successive gli angoli non sono più soprassegnati)

Le corrispondenti correlative sono:

$$\begin{aligned}
 \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \sin a \\
 \sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a \\
 \sin B \cos a &= \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b \\
 \sin B \cos c &= \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b \\
 \sin C \cos b &= \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c \\
 \sin C \cos a &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

per le quali si può enunciare la seguente regola:

In un triangolo sferico il prodotto del seno di un angolo(A) per il coseno di un lato adiacente (b) è dato dal prodotto del coseno dell'angolo(B) per il seno del terzo angolo (C) più il seno del secondo angolo(B) per il coseno del terzo (C) per il seno del lato (a) opposto al primo angolo(A). (v. figura 1.7)

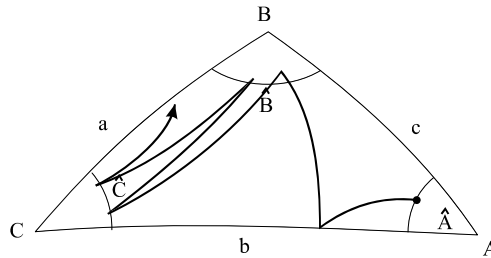


Figura 1.7 – Triangolo sferico: schema di calcolo

1.3.2 - Relazioni di seconda specie.

Formule di Vieta

Le relazioni di Vieta sono note come formule dei quattro elementi consecutivi; si ricavano direttamente operando il rapporto fra una relazione dei seni ed una relazione del teorema delle proiezioni:

$$\sin b \sin C = \sin c \sin B$$

$$\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B$$

Operando il rapporto si ottiene:

$$\tan C = \frac{\sin c \sin B}{\cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B}$$

Ovvero

$$\cot C = \frac{\cot c \sin a - \cos a \cos B}{\sin B}$$

$$\cot c \sin a = \cos a \cos B + \sin B \cot C \quad (1.23)$$

Si può enunciare la seguente regola:

In un triangolo sferico la cotangente di un primo lato (c) per il seno di un secondo lato (a) è uguale al prodotto del coseno di questo secon-

do lato (a) per il coseno dell'angolo compreso (B) più il prodotto del seno di quest'ultimo angolo per la cotangente dell'angolo adiacente (C).
(v. figura 1.8)

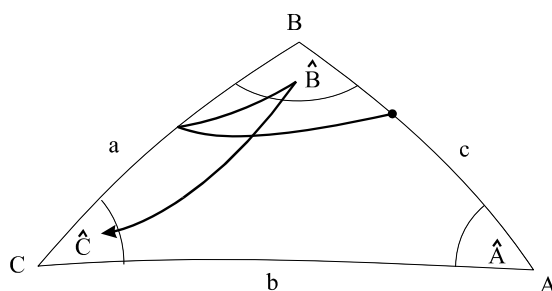


Figura 1.8 – Triangolo sferico: schema di calcolo

Dalla relazione di Vieta trovata, per rotazione, si possono facilmente ricavare tutte le altre relazioni:

$$\begin{aligned}
 \cot c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A \cot C \\
 \cot a \sin b &= \cos b \cos B + \sin B \cot A \\
 \cot a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \cot A \\
 \cot b \sin a &= \cos a \cos C + \sin C \cot B \\
 \cot b \sin c &= \cos c \cos A + \sin A \cot B
 \end{aligned}
 \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

1.3.3 - Relazioni di seconda specie.

L'espressione trigonometrica relativa al teorema delle proiezioni può essere facilmente trovata per mezzo di una qualunque relazione dei quattro elementi consecutivi. Infatti prendendo la prima delle (1.24) e moltiplicandola per $\sin c$ si ha:

$$\cos c \sin b = \cos b \cos A \sin c + \sin c \sin A \cot C$$

Ma per il teorema dei seni, essendo:

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}, \quad \sin c \sin A = \sin a \sin C$$

Sostituendo l'uguaglianza trovata a secondo membro della precedente si ha:

$$\cos c \sin b = \cos b \cos A \sin c + \sin a \cos C$$

Ovvero

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A$$

Che rappresenta una delle relazioni date dalle (1.21).

1.4 - Relazioni per triangoli sferici rettangoli e rettilateri.

Il triangolo sferico diventa rettangolo o rettilatero quando un suo angolo o lato è uguale a 90° . Sulla sfera di riferimento si possono definire triangoli sferici che hanno uno o più angoli retti ed uno o più lati retti.; caso estremo è quello del triangolo sferico con tre angoli retti e tre lati retti.

Se nel triangolo sferico (v. figura 1.9) supponiamo che l'angolo $A = 90^\circ$, allora le relazioni fondamentali della trigonometria sferica si trasformano per dare le formule di Nepero e dalle quali è possibile definire due regole fondamentali per i triangoli sferici rettangoli e rettilateri.

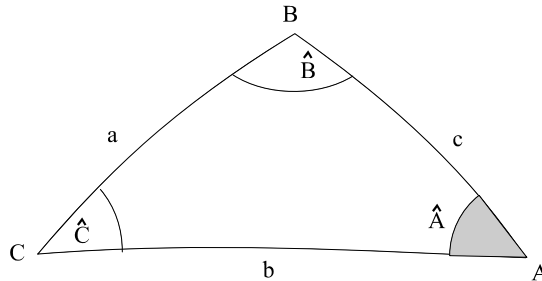


Figura 1.9 – Triangolo sferico rettangolo

Dalla relazione fondamentale applicata al lato a e con $A = 90^\circ$ oppure alla correlativa si ottengono le seguenti due relazioni:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$A = 90^\circ$$

$$\cos a = \cos b \cos c = \sin(90 - b) \sin(90 - c)$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

$$0 = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad (1.25)$$

$$\cos a = \cot B \cot C$$

Si ottengono le stesse relazioni quando si utilizzano una relazione dei seni ed una delle formule di proiezione:

$$\sin a \cos B = \sin b \sin A$$

$$A = 90^\circ$$

$$\sin b = \cos(90 - b) = \sin a \sin B$$

$$\cos b \cos A = \sin b \cot c - \sin A \cot C$$

$$0 = \sin b \cot c - \cot C \quad (1.26)$$

$$\cos(90 - b) = \cot C \cot(90 - c)$$

Procedendo con lo stesso metodo ed utilizzando le altre possibili relazioni si possono ottenere le seguenti relazioni:

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C$$

$$\sin c = \sin a \sin C$$

$$\cos(90 - c) = \sin a \sin C$$

$$\cos c \cos A = \sin c \cot b - \sin A \cot B$$

$$0 = \sin c \cot b - \cot B \quad ; \quad \sin c = \cot B \tan b \quad (1.27)$$

$$\cos(90 - c) = \cot B \cot(90 - b)$$

$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin A \sin C \cos b$$

$$\cos B = \sin C \cos b$$

$$\cos B = \sin C \sin(90 - b)$$

$$\cos c \cos B = \sin c \cot a - \sin B \cot A$$

$$\cos c \cos B = \sin c \cot a \quad (1.28)$$

$$\cos B = \cot(90 - c) \cot a$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

$$\cos C = \sin B \cos c$$

$$\cos C = \sin B \sin(90 - c)$$

$$\cos b \cos C = \sin b \cot a - \sin C \cot A$$

$$\cos b \cos C = \sin b \cot a \quad (1.29)$$

$$\cos C = \cot(90 - b) \cot a$$

Segue la regola di NEPERO:

In un triangolo sferico rettangolo, sostituendo ai cateti il loro complemento, il coseno di un elemento è dato dal prodotto delle cotangenti degli elementi adiacenti o dal prodotto dei seni degli elementi lontani.

Lo studente nell'applicare questa regola può utilizzare il seguente schema per la scelta, fissato l'elemento incognito con A angolo retto, degli elementi vicini o quelli lontani (v. figura 1.10):

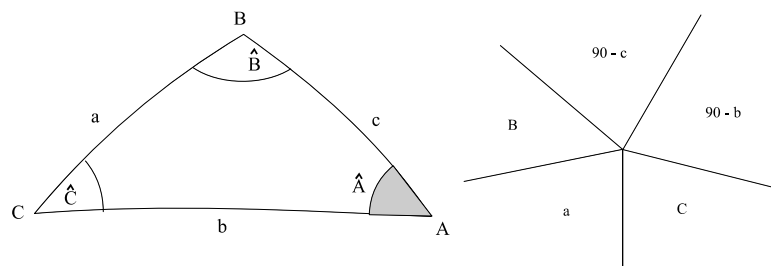


Figura 1.10 – Triangolo sferico rettangolo e schema per l'applicazione delle formule di Nepero

Per esempio, con B elemento centrale da calcolare, si ottengono le due seguenti relazioni:

$$\cos B = \cot(90 - c) \cot a \quad (1.30)$$

$$\cos B = \sin(90 - b) \sin C$$

Per i triangoli sferici rettilateri (v. figura 1.11) vale la seguente regola (si consideri $a=90$):

In un triangolo sferico rettilatero, sostituendo agli angoli adiacenti il loro complemento ed all'angolo opposto il suo supplemento, il coseno di un elemento è dato dal prodotto delle cotangenti degli elementi adiacenti o dal prodotto dei seni degli elementi lontani.

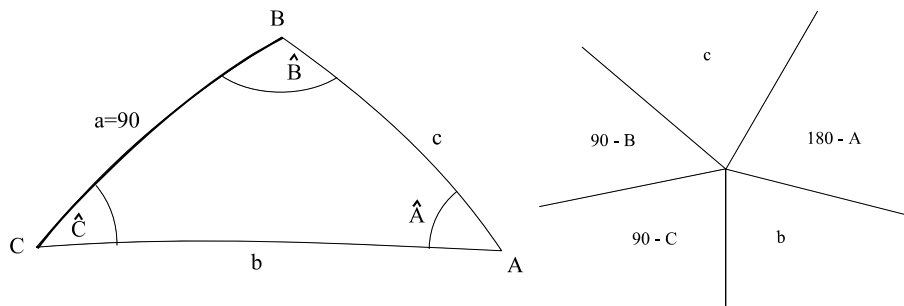


Figura 1.11 – Triangolo sferico rettilatero e schema per l'applicazione delle formule di Nepero

Considerando c come elemento cercato, si possono ricavare facilmente le due seguenti relazioni :

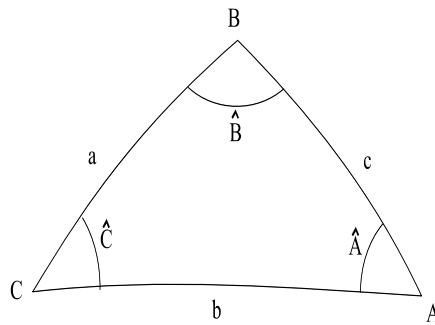
$$\begin{aligned}\cos c &= \cot(90 - B) \cot(180 - A) \\ \cos c &= \sin(90 - C) \sin b\end{aligned}\tag{1.31}$$

1.5.1 - Relazioni di terza specie.

In molti casi si presenta la necessità di esprimere gli elementi di un generico triangolo sferico per mezzo di semi elementi (angoli o lati). In astronomia sono molto utilizzate le *formule di Borda* e le *Analogie di Nepero*.

1.5.2 - Formule di Borda.

Queste formule si ricavano facilmente partendo dalla formula fondamentale della trigonometria sferica applicata al lato a :



$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c}$$

può essere ulteriormente sviluppata applicando le formule di addizione, sottrazione e quelle di Prostaferesi:

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c} = - \frac{2 \sin \frac{b-c+a}{2} \sin \frac{b-c-a}{2}}{\sin b \sin c}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a-b+c}{2}}{\sin b \sin c}$$

Questa relazione è ulteriormente trasformata tenendo presente le relazioni:

$$a + b + c = 2p \qquad p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$a + b + c - 2a = 2p - 2a \qquad p - a = \frac{b - a + c}{2}$$

$$a + b + c - 2b = 2p - 2b \qquad p - b = \frac{a - b + c}{2}$$

$$a + b + c - 2c = 2p - 2c \qquad p - c = \frac{a + b - c}{2}$$

con le quali si ottiene la seguente relazione:

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c} \quad \text{ovvero} \quad \sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}} \quad (1.32)$$

Si ottiene un'analogia relazione, in termini della funzione coseno, procedendo nel seguente modo:

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A &= \frac{\cos a - (\cos b \cos c - \sin b \sin c)}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos(b-c)}{\sin b \sin c} \\ &= -2 \frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a-b-c}{2}}{\sin b \sin c} = 2 \frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \sin c} \end{aligned}$$

dalla quale si ottiene:

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c} \quad \text{ovvero} \quad \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}}$$

e quindi la relazione finale:

$$\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}} \quad (1.33)$$

e per rotazione ciclica di angoli e lati:

$$\tan \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin p \sin(p-b)}} \quad \text{e} \quad \tan \frac{C}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)}} \quad (1.34)$$

Quando sono noti gli angoli interni degli stessi, è possibile calcolare i lati con le formule correlative; queste relazioni si trovano introducendo la definizione di eccesso sferico:

Nei triangoli sferici, al contrario di quanto avviene nel piano, la somma degli angoli interni può superare 180° ; la differenza tra la somma degli angoli e 180° definisce l'eccesso sferico del triangolo sferico:

$$\sigma = A + B + C - \pi \quad (1.35)$$

L'eccesso sferico σ può raggiungere il valore massimo quando si considera un triangolo sferico trirettangolo (caso di triangolo sferico coincidente con i lati sferici rappresentati dai cerchi massimi passanti per gli assi di riferimento (v. figura 1.12).

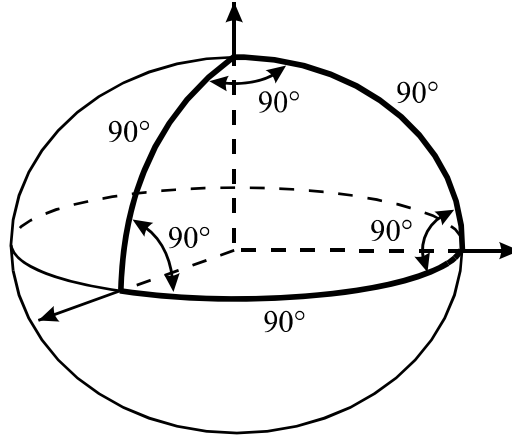


Figura 1.12 – Triangolo sferico trirettangolo e trirettilatero

L'eccesso sferico è usato per trovare le formule correlative del Borda.

Ricordando che per trovare le correlative è sufficiente sostituire ai lati i corrispondenti supplementi degli angoli opposti si ha:

$$2p = a + b + c \quad , \quad a \rightarrow \pi - A \quad , \quad b \rightarrow \pi - B \quad , \quad c \rightarrow \pi - C$$

e quindi:

$$2p = (\pi - A) + (\pi - B) + (\pi - C) = 3\pi - (A + B + C) = 2\pi - \sigma$$

$$p = \pi - \frac{\sigma}{2}, p - a \Leftrightarrow A - \frac{\sigma}{2}, p - b \Leftrightarrow B - \frac{\sigma}{2}, p - c \Leftrightarrow C - \frac{\sigma}{2}$$

Sostituendo le relazioni trovate nella prima relazione di Borda si ha:

$$\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}} \Rightarrow \tan(90 - \frac{a}{2}) = \pm \sqrt{\frac{\sin(B - \frac{\sigma}{2})\sin(C - \frac{\sigma}{2})}{\sin(\pi - \frac{\sigma}{2})\sin(A - \frac{\sigma}{2})}}$$

$$\cot \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin(B - \frac{\sigma}{2})\sin(C - \frac{\sigma}{2})}{\sin(\frac{\sigma}{2})\sin(A - \frac{\sigma}{2})}} \quad (1.36)$$

Con la quale è facile ricavare le tre relazioni correlative di Borda:

$$\tan \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin(\frac{\sigma}{2})\sin(A - \frac{\sigma}{2})}{\sin(B - \frac{\sigma}{2})\sin(C - \frac{\sigma}{2})}}, \quad \tan \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin(\frac{\sigma}{2})\sin(B - \frac{\sigma}{2})}{\sin(C - \frac{\sigma}{2})\sin(A - \frac{\sigma}{2})}},$$

$$\tan \frac{c}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin(\frac{\sigma}{2})\sin(C - \frac{\sigma}{2})}{\sin(A - \frac{\sigma}{2})\sin(B - \frac{\sigma}{2})}}$$

$$(1.37)$$

1.5.3 - Analogie di Nepero.

Le analogie di Nepero, molto usate in Astronomia, legano i tre lati e i tre angoli sotto forma di semi somma e semi differenza degli elementi. Esse si ricavano direttamente dalle seguenti formule di Delambre:

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{b+c}{2} = \cos \frac{B-C}{2} \sin \frac{a}{2} \quad , \quad \cos \frac{A}{2} \sin \frac{b-c}{2} = \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{a}{2}$$

Operando il rapporto fra la prima e la seconda:

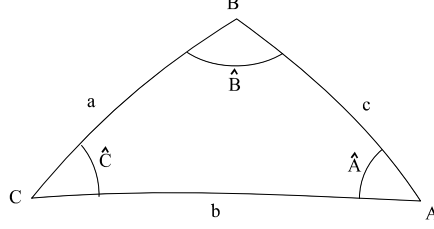


Figura 1.13 – Triangolo sferico

$$\tan \frac{B-C}{2} = \cot \frac{A}{2} \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{b+c}{2}} \quad (1.38)$$

Operando, invece, sulle due seguenti equazioni di Delambre:

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{B+C}{2} = \cos \frac{b+c}{2} \sin \frac{A}{2} \quad , \quad \cos \frac{a}{2} \sin \frac{B+C}{2} = \sin \frac{b-c}{2} \cos \frac{A}{2}$$

Si ottiene una seconda relazione:

$$\tan \frac{B+C}{2} = \cot \frac{A}{2} \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{b+c}{2}} \quad (1.39)$$

Per rotazione si ottengono le rimanenti equazioni:

$$\tan \frac{C-A}{2} = \cot \frac{B}{2} \frac{\sin \frac{c-a}{2}}{\sin \frac{c+a}{2}} \quad , \quad \tan \frac{C+A}{2} = \cot \frac{B}{2} \frac{\cos \frac{c-a}{2}}{\cos \frac{c+a}{2}} \quad (1.40)$$

$$\tan \frac{A-B}{2} = \cot \frac{C}{2} \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}, \quad \tan \frac{A+B}{2} = \cot \frac{C}{2} \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \quad (1.41)$$

Seguendo il metodo già esposto, si possono anche ricavare le formule correlative:

$$\tan \frac{b-c}{2} = \tan \frac{a}{2} \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}}, \quad \tan \frac{b+c}{2} = \tan \frac{a}{2} \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}} \quad (1.42)$$

$$\tan \frac{c-a}{2} = \tan \frac{b}{2} \frac{\sin \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{C+A}{2}}, \quad \tan \frac{c+a}{2} = \tan \frac{b}{2} \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\cos \frac{C+A}{2}} \quad (1.43)$$

$$\tan \frac{a-b}{2} = \tan \frac{c}{2} \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}}, \quad \tan \frac{a+b}{2} = \tan \frac{c}{2} \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \quad (1.44)$$

1.6 – Trasformazione di coordinate fra sistemi di riferimento

Le relazioni trigonometriche ottenute per la sfera delle direzioni non sempre trovano applicazione quando si considerano figura geometriche di dimensione finite oppure quando occorre passare dalla sfera delle direzioni ad una terna di riferimento locale.

Questo problema si incontra spesso quando si effettuano delle trasformazioni di coordinate da sistemi inerziali:

- uranografico equatoriale;
- uranografico eclittico.

ai sistemi terrestri:

- equatoriale terrestre;

- topografico locale.

In questi casi è preferibile utilizzare le proprietà delle matrici di rotazione.

1.6.1 – Trasformazione fra due generici sistemi di riferimento

Sia R un vettore generico riferito ai due sistemi di riferimento O_{xyz} e O_{uvw} (v. figura 1.14) con il loro origine coincidente:

$$R = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

i cui assi sono rappresentati dai seguenti versori:

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

Il vettore R , del primo sistema, può essere definito per mezzo dello stesso vettore rappresentato rispetto al secondo sistema per mezzo della seguente notazione matriciale:

$$[R]_{O_{xyz}} = H_{O_{xyz}}^{O_{uvw}} [R]_{O_{uvw}} \quad (1.48)$$

L'espressione della matrice di rotazione può essere calcolata applicando la matrice di rotazione (1.8) precedentemente studiata.

Alle stesse conclusioni si può arrivare studiando la rappresentazione del vettore R nei due riferimenti.

Nella figura 1.14, il vettore R è rappresentato per mezzo delle sue rispettive componenti rispetto alle due terne di riferimento i cui assi sono definiti dai versori $[i, j, k]$ e $[u, v, w]$; l'estremità del vettore R ha rispettivamente coordinate: $[X, Y, Z]$ e $[U, V, W]$. Il vettore R è dato da:

$$R = Xi + Yj + Zk = Uu + Vv + Ww \quad (1.49)$$

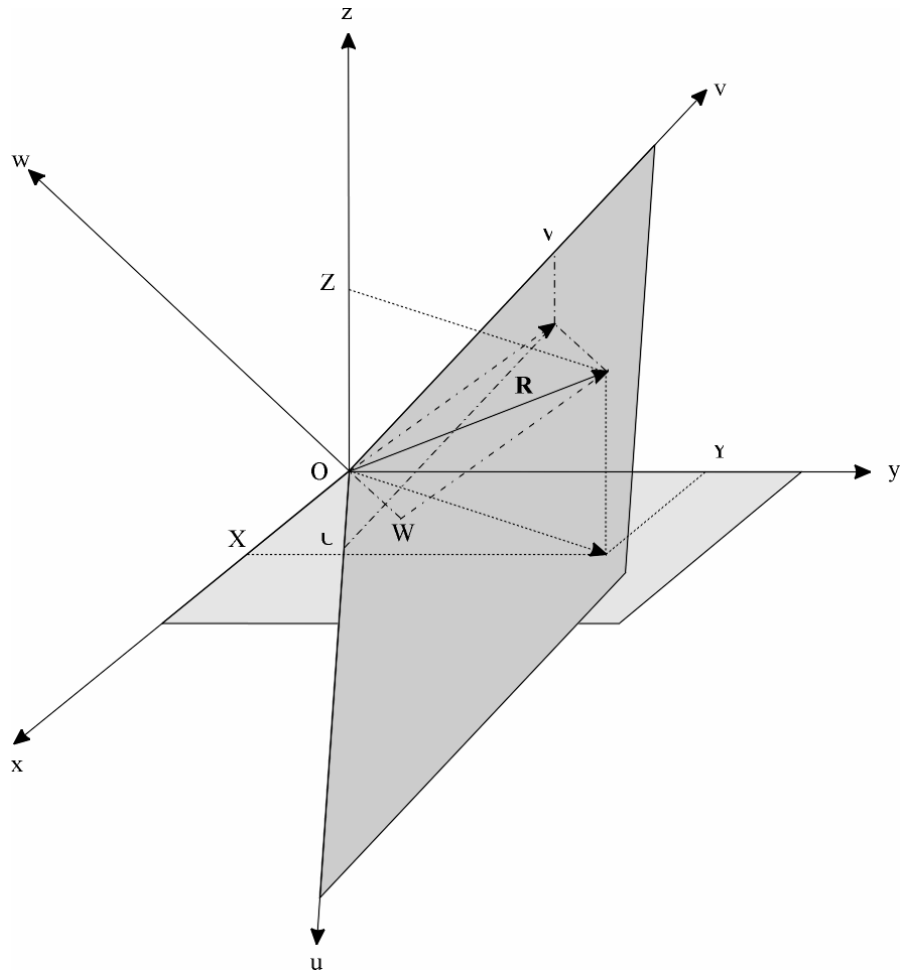


Figura 1.14 – Sistemi di riferimento Oxyz e Ouvw

Inoltre, le rispettive componenti possono anche essere rappresentate in termini del prodotto scalare di R per i rispettivi versori:

$$X = i^T R = U i^T u + V i^T v + W i^T w \quad (1.50)$$

$$Y = j^T R = U j^T u + V j^T v + W j^T w \quad (1.51)$$

$$Z = k^T R = U k^T u + V k^T v + W k^T w \quad (1.52)$$

ed esprimendo in forma matriciale le tre equazioni:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^T u & i^T v & i^T w \\ j^T u & j^T v & j^T w \\ k^T u & k^T v & k^T w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

La (1.53) giustifica la relazione (1.48); inoltre, per definizione di prodotto scalare di versori (vettori) la matrice di rotazione può esprimersi anche nel seguente modo:

$$H_{Oxyz}^{Ouvw} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{iu}) & \cos(\theta_{iv}) & \cos(\theta_{iw}) \\ \cos(\theta_{ju}) & \cos(\theta_{jv}) & \cos(\theta_{jw}) \\ \cos(\theta_{ku}) & \cos(\theta_{kv}) & \cos(\theta_{kw}) \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

La (1.54), apparentemente molto complessa, è identica alla già citata matrice (1.8); con semplici considerazioni, si ricavano le sue espressioni per rotazioni attorno ad un singolo asse:

$$\begin{aligned} R_x(\alpha) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} & R_x(\alpha') &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha' & \sin \alpha' \\ 0 & -\sin \alpha' & \cos \alpha' \end{bmatrix} \\ R_y(\beta) &= \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} & R_y(\beta') &= \begin{bmatrix} \cos \beta' & 0 & -\sin \beta' \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta' & 0 & \cos \beta' \end{bmatrix} \\ R_z(\gamma) &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & R_z(\gamma') &= \begin{bmatrix} \cos \gamma' & \sin \gamma' & 0 \\ -\sin \gamma' & \cos \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.55)$$

le matrici a sinistra sono valide per un rotazione oraria (positiva) per un sistema destrorso, quelle a sinistra per una rotazione positiva in un sistema levogiro.

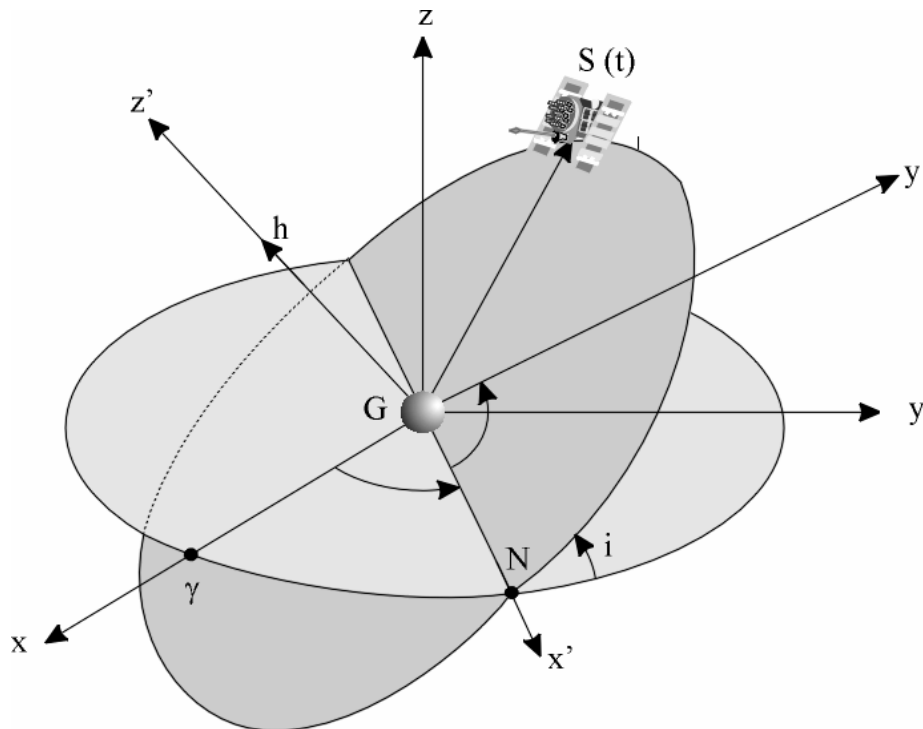


Figura 1.15 – Sistemi inerziali di riferimento: G_{XYZ} e $G_{X'Y'Z'}$

1.6.2 – Applicazioni

In navigazione satellitare si affrontano problemi di trasformazione di coordinate per passare dal sistema di riferimento inerziale a quello geocentrico terrestre e successivamente a quello locale centrato sul punto dell'antenna del ricevitore satellitare.

1.6.3. – Il sistema inerziale terrestre (ECI)

Il sistema inerziale centrale (ECI – *Earth Centered Inertial*) definisce la posizione del satellite rispetto alla terna centrata nel baricentro della terra, l'asse G_Z coincidente con l'asse terrestre, il piano G_{XY} coincidente con il piano equatoriale, l'asse G_X orientato verso il punto vernale gamma (γ - punto equinoziale) e l'asse G_Y levogiro.

Com'è ben noto questo sistema rappresenta il riferimento uranografico equatoriale perciò la posizione del satellite è:

$$R = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Un analogo sistema inerziale si ottiene quando si considera una terna levogira con il piano di riferimento coincidente con il piano orbitale, l'asse G_X orientato verso il nodo ascendente dell'orbita.

1.6.4 – Il sistema geocentrico terrestre (ECEF)

Questo sistema (*ECEF, Earth Centered Earth Fixed*) ha lo stesso centro di riferimento del sistema inerziale (*ECI*) con l'asse G_X orientato con il piede del meridiano di Greenwich. Rispetto al sistema inerziale, questo sistema è fisso rispetto alla terra perciò esso ruota con la velocità angolare della terra. L'angolo tra il riferimento inerziale (*ECI*) e quello terrestre (*ECEF*) è rappresentato dal tempo sidereo (T_s). Il calcolo del tempo sidereo è studiato nel capitolo 2.

Le coordinate del satellite, rispetto a questo sistema, sono:

$$R = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ \sin \phi \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

Il passaggio dal sistema inerziale a quello terrestre è possibile per mezzo di una rotazione attorno all'asse $Z(z)$:

$$R = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = H_z(T_s) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos T_s & \sin T_s & 0 \\ -\sin T_s & \cos T_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

con T_s positivo (senso antiorario) per una terna levogira.

1.6.5 – Il sistema topocentrico piano (LTP)

Questo sistema è quello classico del piano tangente alla superficie della terra (*LTP – Local Tangent Plan*). L'asse G_Z coincidente con la verticale, il piano G_{XY} coincidente con il piano tangente, l'asse G_X orientato nel

verso della latitudine crescente (verso il nord) e l'asse G_Y tangente al parallelo e rivolto verso est; gli angoli sul piano si contano nel senso orario a partire dall'asse tangente al meridiano: orientamento utilizzato in navigazione per la misura delle direzioni (*azimut*).

1.6.6 – I sistemi topocentrico *ENU-NED*

Questi due sistemi, simili al sistema topocentrico piano, differiscono per il loro orientamento.

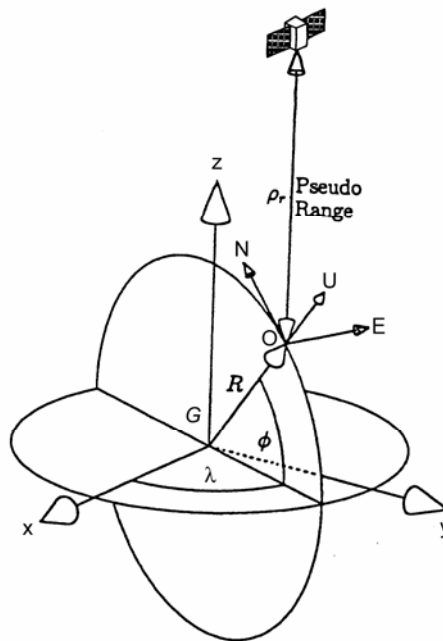


Figura 1.16 – Sistema di riferimento *ECEF* e *ENU*

Il sistema topocentrico locale *ENU* (*East – North – Up*) è un sistema di riferimento levogiro con l'origine sull'asse East, l'asse north orientato verso il polo e l'asse perpendicolare al piano tangente con il verso positivo verso l'alto (*terna levogira*).

Il sistema topocentrico locale *NED* (*North – East – Down*) è una terna oraria con l'asse C_x coincidente con il meridiano tangente all'origine, l'asse C_y tangente al parallelo e l'asse C_z coincidente con la perpendicolare al piano ma con il verso positivo verso il basso.

Il passaggio dal sistema *ENU* al *NED* è data dalla seguente matrice di rotazione:

$$R_{NED}^{ENU} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

Il sistema *NED* è utilizzato in navigazione aerea dato che l'asse longitudinale dell'aereo forma un angolo con la direzione del meridiano coincidente con la prora dell'aereo ed il piano tangente coincidente con piano d'assetto dell'aereo.

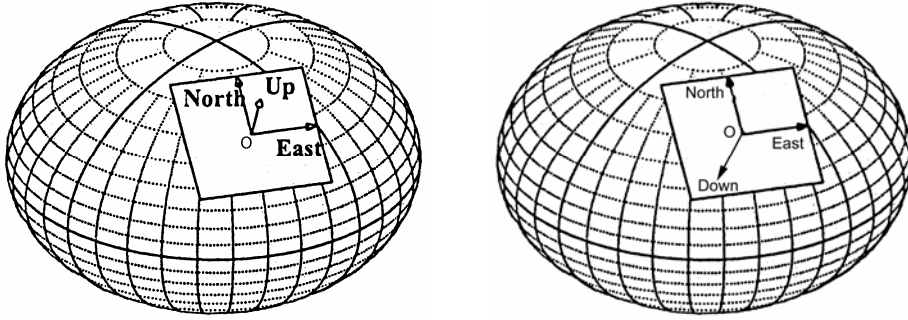


Figura 1.17 – Sistemi di riferimento *ENU* – *NED*

Per quanto visto usando i versori delle terne di riferimento, i versori della terna *ENU* in coordinate *ECEF* sono:

$$u_E = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_N = \begin{bmatrix} -\cos \lambda \sin \phi \\ -\sin \lambda \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix}, \quad u_U = \begin{bmatrix} \cos \lambda \cos \phi \\ \sin \lambda \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

Quelli del sistema *ECEF* rispetto alla terna *ENU* sono:

$$u_X = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \\ -\cos \lambda \sin \phi \\ \cos \lambda \cos \phi \end{bmatrix}, \quad u_Y = \begin{bmatrix} \cos \lambda \\ -\sin \lambda \sin \phi \\ \sin \lambda \cos \phi \end{bmatrix}, \quad u_Z = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

Viceversa il passaggio dal sistema *NED* ad *ECEF* fornisce i seguenti versori:

$$u_N = \begin{bmatrix} -\cos \lambda \sin \phi \\ -\sin \lambda \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix}, u_E = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \\ -\cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix}, u_D = \begin{bmatrix} -\cos \lambda \cos \phi \\ -\sin \lambda \cos \phi \\ -\sin \phi \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

mentre il passaggio da *ECEF* a *NED* è dato dai seguenti versori:

$$u_X = \begin{bmatrix} -\cos \lambda \sin \phi \\ -\sin \lambda \\ -\cos \lambda \cos \phi \end{bmatrix}, u_Y = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \sin \phi \\ \cos \lambda \\ -\sin \lambda \cos \phi \end{bmatrix}, u_Z = \begin{bmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ -\sin \phi \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

La verifica della matrice di rotazione (1.59) può essere fatta considerando un vettore rappresentato nel sistema levogiro (antiorario) ENU ed uno nel sistema NED orario (v. figura 1.18).

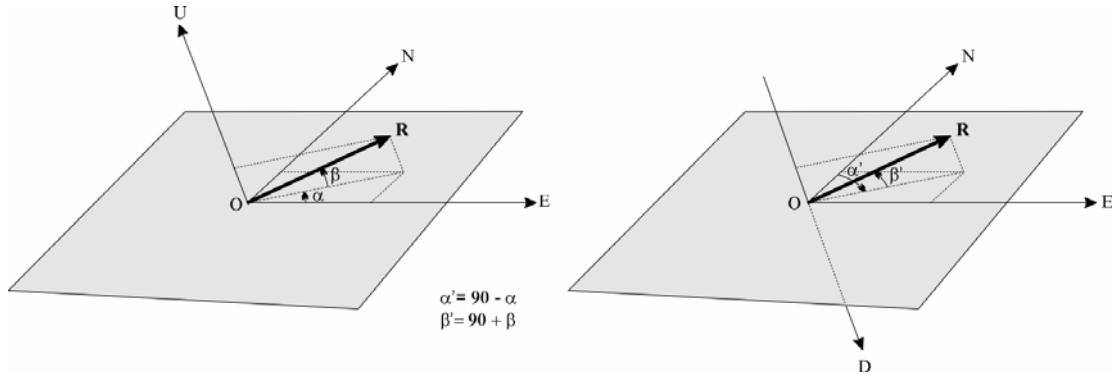


Figura 1.18 – Rappresentazione del vettore **R** nella terna ENU ed NED

Dalle rappresentazioni del generico vettore **R** di modulo ρ si ricavano le componenti dello stesso vettore:

$$\begin{bmatrix} E \\ N \\ U \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix}, \quad (1.64)$$

$$\begin{bmatrix} N \\ E \\ D \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

Allora, se si applica la matrice di rotazione (1.59) al primo vettore, si deve ottenere il secondo:

$$\begin{bmatrix} N \\ E \\ D \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

con (α, β) gli angoli che definiscono il vettore nei due sistemi di riferimento. In effetti si può osservare che il vettore (1.66), ottenuto per rotazione (1.59) è identico a vettore (1.65) per proiezione con considerazioni geometriche.

1.7 – Visibilità dei satelliti GPS

La posizione dei satelliti calcolata per mezzo dei parametri orbitale è definita nel sistema *ECI*, dopo due rotazioni per il passaggio dal sistema orbitale a quello inerziale; le due rotazioni sono forniti dall'angolo i (inclinazione del piano orbitale) e dall'angolo Ω longitudine del nodo ascendente per passare dall'asse orientato verso il nodo ascendente all'asse inerziale orientato verso il punto equinoziale γ :

$$R_{Gxyz} = R \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_{GXYZ} = R H_z(\Omega) H_x(i) \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

$$R_{GXYZ} = R \begin{bmatrix} \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i \\ \cos u \cos \Omega + \sin u \sin \Omega \cos i \\ \sin u \sin i \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

$$T_s = T_s(t_o) + (t - t_o) \frac{2\pi}{43082} \quad (1.69)$$

con R , in prima approssimazione, dato dal semiasse maggiore dell'orbita pari a 26500000 m.

Le coordinate *ECEF* si ricavano compiendo una successiva rotazione attorno all'asse Z dell'angolo pari al tempo sidereo T_s :

$$\begin{aligned}
[R_{GXYZ}]_{ECEF} &= R_Z(T_S) R \begin{bmatrix} \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i \\ \cos u \cos \Omega + \sin u \sin \Omega \cos i \\ \sin u \sin i \end{bmatrix} = \\
&= R \begin{bmatrix} \cos u \cos(\Omega + T_S) - \sin u \sin(\Omega + T_S) \cos i \\ \cos u \cos(\Omega + T_S) + \sin u \sin(\Omega + T_S) \cos i \\ \sin u \sin i \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (1.70)$$

Rimane il problema di definire le coordinate *ENU* oppure le *NUD* del satellite rispetto al ricevitore posto sulla superficie della terra.

Per ottenere queste coordinate occorre effettuare una traslazione per passare dalla terna *ECEF* geocentrica alla terna topocentrica ed effettuare una rotazione per passare dalla *ECEF* ad *ENU(NEU)*.

Il passaggio dalla terna *ECEF* a quella locale *ENU* levogira è dato dalla seguente trasformazione di coordinate

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix}_{ENU} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \\ \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{ECEF} \quad (1.71)$$

nella quale (ϕ, λ) sono le coordinate geografiche del punto locale appartenente al piano tangente sulla terra e $[\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z]^T$ il vettore che rappresenta l'oggetto osservato dal punto locale (*Slant vector*). Da questa trasformazione si ricava l'azimut e l'altezza dell'oggetto osservato rispetto alla terna levogira con l'asse principale *e* orientato verso il punto cardinale Est:

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \alpha \cosh \\ \sin \alpha \cosh \\ \sinh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta X \sin \lambda + \Delta Y \cos \lambda \\ -\Delta X \sin \phi \cos \lambda - \sin \phi \sin \lambda + \Delta Z \cos \phi \\ \Delta X \cos \phi \cos \lambda + \cos \phi \sin \lambda + \Delta Z \sin \phi \end{bmatrix} \quad (1.72)$$

con l'azimut α contato, nel senso levogiro, a partire dal punto Est.

La trasformazione delle coordinate dal sistema *ECEF* al sistema rappresentato dalla terna destrogira *NEU*, (coordinate alto azimutali comunemente utilizzate in navigazione), è rappresentata dalla seguente relazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} N \\ E \\ U \end{bmatrix}_{NEU} = R_Y(90 - \phi) R_Z(180 - \lambda) \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{ECEF} \quad (1.73)$$

$$R(\phi, \lambda) = \begin{bmatrix} -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

Con l'asse N tangente al meridiano, rivolto verso le latitudini positive; gli angoli sono contati nel senso orario a partire dall'asse N . Lo sviluppo del prodotto matriciale dato dalla (1.73) fornisce l'azimut A_z e l'altezza h dell'oggetto osservato e definito nel sistema $ECEF$:

$$A_z = \tan^{-1} \left[\frac{-\Delta X \sin \lambda + \Delta Y \cos \lambda}{-\Delta X \sin \phi \cos \lambda - \Delta Y \sin \phi \sin \lambda + \Delta Z \cos \phi} \right] \quad (1.75)$$

$$h = \sin^{-1} \left[\frac{\Delta X \cos \phi \cos \lambda + \Delta Y \cos \phi \sin \lambda + \Delta Z \sin \phi}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}} \right] \quad (1.76)$$

$$\rho = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} \quad (1.77)$$